数理解析研究所講究録
1177 巻 2000 年 44-51

Cuntz-Krieger-Pimsner Algebras Associated with Amalgamated Free Products Groups

京都大・理　　岡安 類 (Rui OKAYASU)

1 概説

S. Adams [Ada] の結果によって任意の離散双曲的群 Γ の自分自身の無限遠境界 $\partial\Gamma$ への作用が C. Anantharaman-Delaroche [Ana] の意味で位相的に従順な作用であることが示されました。つまりそれらからできる接合積 $C(\partial\Gamma)\rtimes_r\Gamma$ が核型であることに他なりませんが, それ以外にはあまり多くのことは知られていません. 今回はこれらをもう少し深く調べることが第一の目的です. まず任意の双曲的群を考えるのではなく, もう少し簡単な場合について考えたのが今回の結果です. もっとも簡単な双曲的群の例として自由群があります. これは無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の自由積で表される離散群ですが, このとき上のような接合積は, J. Spielberg [Spi] によってある Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ になることが示されています. そこでこれらの結果を群の融合積に対して拡張し, 上のような接合積がどのようになっているかを考えます. まず, [Spi] の結果を $\mathbb{F}_2$ について復習しましょう.

2 $\mathbb{F}_2$ の場合

自由群 $\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ の生成元を a,b として, 生成系を $S=\{a,a^{-1},b,b^{-1}\}$ とおきます. このときの Cayley graph は樹となるので, 双曲的群と見て無限遠境界を考えるのと, H. Furstenberg [Fur] の意味で無限遠境界を考えるのは同じです. (双曲的群については例えば [GH] などを参照下さい.) この無限遠境界を Ω とすれば次のような空間となります:

$$\Omega=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in S, x_n\neq x_{n+1}\quad\text{for any}\quad n\}.$$

位相は S の無限直積の部分集合と見たときの相対位相を入れます. $\mathbb{F}_2$ の $C(\Omega)$ への作用は, $\mathbb{F}_2$ の Ω への左からの掛け算から導入されたものとします. そこで, 接合積 $C(\Omega)\rtimes_r\Gamma$ を考えましょう. 各 $x\in S$ に対して, Ω の clopen subset $\Omega(x)$ を

$$\Omega(x)=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\mid x_1=x\}\subseteq\Omega,$$

とおき, λ_x を implementing unitary とします. このとき, partial isometry S_x を

$$S_x=\lambda_x(1-\chi_{\Omega(x^{-1})})$$

と定義すると, 簡単に次のことが確かめられます.

$$S_x^*S_y=\delta_{x,y}S_x^*S_x,$$

$$S_x^* S_x = \sum_{y \neq x^{-1}} S_y S_y^*.$$

また, これらが C^*-環として $C(\Omega) \rtimes_r \Gamma$ を生成し, この場合は対応する Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ が単純なので, 直ちに

$$C(\Omega) \rtimes_r \Gamma = C^*(S_x \mid x \in S) \simeq \mathcal{O}_A$$

が得られます. ここで行列 A は 既約な $S \times S$-行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

ここまでが [Spi] の結果ですが, 更にここで Fock space による Cuntz-Krieger 環の構成方法を考えます. まず, $\mathbb{C}^4$ の基底 $\{e_a, e_b, e_{a^{-1}}, e_{b^{-1}}\}$ をひとつ固定しておきます. Fock space は,

$$\mathcal{F}_A = \mathbb{C}e_0 \oplus \bigoplus_{n \geq 1} (\overline{\mathrm{span}}\{e_{x_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_n} \mid A(x_i, x_{i+1}) = 1\})$$

で定めます. 但し,e_0 は vacuum vector と呼ばれるものです. 各 $x \in S$ に対して, creation operator T_x を

$$\begin{aligned} T_x e_0 &= e_x, \\ T_x(e_{x_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_n}) &= \begin{cases} e_x \otimes e_{x_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_n} & \text{if } A(x, x_1) = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

と定義し, π を $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ から $\mathcal{B}(\mathcal{F})/\mathcal{K}(\mathcal{F})$ への商写像とすれば, $\pi(T_x)$ が生成する C^*-環が $\mathcal{O}_A$ となります. ここで次の同一視を考えることができます:

$$\mathcal{F}_A \ni \begin{array}{ccc} e_0 & \longleftrightarrow & \delta_e \\ e_{x_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_n} & \longleftrightarrow & \delta_{x_1 \cdots x_n} \end{array} \in l^2(\mathbb{F}_2).$$

この同一視のもと creation operator T_x は次のように表すことができます;

$$\begin{aligned} T_x \delta_e &= \lambda_x \delta_e, \\ T_x \delta_{x_1 \cdots x_n} &= \begin{cases} \lambda_x \delta_{x_1 \cdots x_n} & \text{if } x \neq x_1^{-1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

但し,λ は $\mathbb{F}_2$ の左正則表現です. 更に, “length function” $|\cdot|$ を S に関する $\mathbb{F}_2$ の Cayley graph の単位元からの語距離として, p_n を $l^2(\mathbb{F}_2)$ から $\overline{\mathrm{span}}\{\delta_\gamma \in l^2(\mathbb{F}_2) \mid |\gamma| = n\}$ への射影作用素とすると T_x は次のようにも表されます:

$$T_x = \sum_{n \geq 0} p_{n+1} \lambda_x p_n.$$

この表示を使って, 我々の設定である融合積に対して拡張を行います.

3 定義

I を有限な添字の集合として, 各 $i \in I$ に対し有限群 G_i はすべて共通の部分群 H を含んでいるものとします. ある G_i が $\mathbb{Z} \times H$ であっても同様なことが行えますが, 面倒なので今回はすべて有限群と仮定することにします. このとき, Γ をそれらからできる融合積 $*_H G_i$ としましょう. まず "length function" $|\cdot|$ を定義します. $i \in I$ に対し Ω_i を G_i/H の代表元からなる集合で $e \in \Omega_i$ となるようにとっておきます. これらをひとつ固定すると, 任意の $\gamma \in \Gamma$ は $g_1 \cdots g_n h$ と唯一通りに書けます ($g_1 \in \Omega_{i_1}, \ldots, g_n \in \Omega_{i_n}, h \in H$ かつ $i_1 \neq i_2, \ldots, i_{n-1} \neq i_n$). ここで, 自然数 n は代表系の取り方に依存しないので, $\gamma \in \Gamma$ が上のように表されているとき $|\gamma| = n$ と定義できます. 後は自由群の場合と同様に, p_n を $l^2(\Gamma)$ から

$$\overline{\mathrm{span}}\{\delta_\gamma \in l^2(\Gamma) \mid |\gamma| = n\}$$

への射影作用素として, 各 $g \in \bigcup_{i \in I} G_i$ に対して,

$$T_g = \sum_{n \geq 0} p_{n+1} \lambda_g p_n$$

と定義します. 但し, λ は Γ の左正則表現です. ここでもし $g \in H$ ならば, $T_g = 0$ となり意味をなさないので, $h \in H$ に対しては別に

$$V_h = \lambda_h$$

と定義しておきます. π を $\mathcal{B}(l^2(\Gamma))$ から $\mathcal{B}(l^2(\Gamma))/\mathcal{K}(l^2(\Gamma))$ への商写像として, $\pi(T_g) = S_g$, $\pi(V_h) = U_h$ と定めます.

各 S_g に対して, S_g の初期射影 $Q_g = S_g^* \cdot S_g$ と終射影 $P_g = S_g \cdot S_g^*$ とおけば, 次の性質が成立します:

$g, g' \in \bigcup_i G_i \setminus H$ と $h \in H$ に対して,

$$S_{gh} = S_g \cdot U_h, \qquad S_{hg} = U_h \cdot S_g, \tag{1}$$

$$P_g \cdot P_{g'} = \begin{cases} P_g = P_{g'} & \text{if } gH = g'H, \\ 0 & \text{if } gH \neq g'H. \end{cases} \tag{2}$$

更に, もし $g \in G_i \setminus H$ ならば,

$$Q_g = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \sum_{g' \in \Omega_j \setminus \{e\}} P_{g'}. \tag{3}$$

最後に,

$$1 = \sum_{i \in I} \sum_{g \in \Omega_i \setminus \{e\}} P_g. \tag{4}$$

また, 各 $i \in I$ に対し $P_i = \sum_{g \in \Omega_i \setminus \{e\}} P_g$ とおいたとき, 任意の $i \in I$ に対して,

$$C^*(H) \simeq C^*\left(P_i U_h P_i \mid h \in H\right). \tag{5}$$

も成立する.

Definition 3.1 上で作った S_g と U_h で生成される C^*-環を $\mathcal{O}_\Gamma$ と定義する.

Remark H が自明の場合, $\mathcal{O}_\Gamma$ は単純な Cuntz-Krieger 環となるので以下 H は自明でない部分群と仮定する.

4 $\mathcal{O}_\Gamma$ の性質

まず, universal proparty と uniqueness theorem が成立します.

Theorem 4.1 もし $\{s_g, u_h\}$ が (1) から (4) の性質も満たせば, $\mathcal{O}_\Gamma$ から $C^*(s_g, u_h)$ への全射 $*$-準同型で, $S_g \mapsto s_g, U_h \mapsto u_h$ となるものが存在する.
　更に $\{s_g, u_h\}$ が (5) も満たせば, 上の $*$-準同型は同型写像となる.

　次に $\mathcal{O}_\Gamma$ は M. V. Pimsner [Pim2] により導入された Cuntz-Krieger-Pimsner 環であること示しましょう.

$$A = C^*(\, P_i U_h P_i \mid h \in H, i \in I\,) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_r^*(H)$$

とおき, Hilbert A-bimodule X を次のように定義します:

$$X = \overline{\mathrm{span}}\{\, S_g P_i \mid g \in \bigcup_{j \neq i} G_j \setminus H,\ i \in I\,\}.$$

ここで, 内積は, $\langle S_g P_i, S_{g'} P_j \rangle = P_i S_g^* S_{g'} P_j \in A$ と定めます. これらは次のように書き直せます. C^* 環 A は同様に,

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[H],$$

と定めます. 記号の $\mathbb{C}[H]$ は H 上の $\mathbb{C}$ 係数の有限和 $f = \sum_{h \in H} c_h h$ 全体からなる C^* 環とします. 次に, A-bimodule $\mathcal{H}_i$ を

$$\mathcal{H}_i = \mathbb{C}[\bigcup_{j \neq i} G_j \setminus H].$$

と定義します. ここで A の左右からの積は次のように入っているとします. $a = (a_i)_{i \in I} \in A$ と $g \in G_j \setminus H \subset \mathcal{H}_i$ に対して,

$$a \cdot g = a_j g,$$
$$g \cdot a = g a_i.$$

と定義し, また内積は, $g, g' \in \bigcup_{j \neq i} G_j \setminus H \subset \mathcal{H}_i$ に対して,

$$\langle g, g' \rangle_{\mathcal{H}_i} = \begin{cases} g^{-1} g' \in A_i & \text{if } g^{-1} g' \in H, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

と定めておきます. このとき A-bimodule X は次のように定義できます.

$$X = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i,$$

この Hilbert A-bimodule X から得られる Cuntz-Krieger 環タイプの CKP 環 $\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{O}_\Gamma$ になることが, お互いに universal proparty を持つことから簡単に示されます.

Proposition 4.2

$$\mathcal{O}_\Gamma \simeq \mathcal{O}_X.$$

次に, $\mathcal{O}_\Gamma$ を実際に接合積の形で表わしましょう. まず, コンパクト空間 Ω を

$$\Omega = \{(g_n)_{n\geq 0} \mid g_n \in \Omega_{i_n}, i_n \neq i_{n+1} \quad \text{for any} \quad n\}$$

と定め, Γ の作用は左からの掛け算で定義します. また, Γ を双曲的群とみて無限遠境界 $\partial\Gamma$ を考えられますが, これらは Γ の作用も込めて同じものとなるので, 次が得られます.

Proposition 4.3

$$\mathcal{O}_\Gamma \simeq C(\Omega) \rtimes_r \Gamma \simeq C(\partial\Gamma) \rtimes_r \Gamma.$$

Remark Γ を双曲的群とみたとき無限遠境界 $\partial\Gamma$ やそれへの作用は双曲的群 Γ にのみ依存するので, 上の命題は $\mathcal{O}_\Gamma$ は作り方などにはよらずに, 完全に Γ にのみ依存することを示してます.

最後に, 核型, 単純, 純無限性について考えましょう. 核型性については, [Ada] の結果によって上の同型から導かれますが, K 群の計算をするために Cuntz-Krieger 環のときと同様な方法で別証明を与えます. まず gauge action を定義します. $z \in \mathbb{T}$ に対して $\{ zS_g, U_h \}$ もまた (1) から (4) を満し, $\mathcal{O}_\Gamma$ を生成しますから, universal property により $\alpha_z(S_g) = zS_g$ かつ $\alpha_z(U_h) = U_h$ となる自己同型写像 α_z が得られます. 更に, α は $\mathbb{T}$ の作用であることがわかります. ここで fixed-points algebra を $\mathcal{O}_\Gamma^{\mathbb{T}} = \{ a \in \mathcal{O}_\Gamma \mid \alpha_z(a) = a \quad \text{for } z \in \mathbb{T}\}$ とおきます.

各 $i \in I$ に対して,

$$\mathcal{F}_n^i = \overline{\operatorname{span}}\{ S_\mu P_i S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = n\}$$

と定義します. Γ の部分集合 Δ_n を

$$\Delta_n = \{\gamma = g_1 \cdots g_n \mid g_k \in \Omega_{i_k}, i_1 \neq \cdots \neq i_n\}$$

とおいて, 各 $\mu, \nu \in \Delta_n$ に対して,

$$e^i_{\mu,\nu} = S_\mu P_i S_\nu^*$$

と定めれば, $\{e^i_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu\in\Delta_n}$ は Δ_n でパラメーター表示された matrix units となります. これと (5) により, ある $\mu \in \Delta_n$ をひとつ固定すれば,

$$\mathcal{F}_n^i \simeq M_{N(n,i)}(\mathbb{C}) \otimes \overline{\operatorname{span}}\{ S_\mu P_i U_h P_i S_\mu^* \mid h \in H \} \simeq M_{N(n,i)}(\mathbb{C}) \otimes C^*(H)$$

が成立することがわかります. 互いに異なる $i, j \in I$ に対して, $\mathcal{F}_n^i$ と $\mathcal{F}_n^j$ は互いに直交するので,

$$\mathcal{F}_n = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_n^i$$

と定めます. また, (2) や (3) により $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ が得られますから,

$$\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n}$$

は AF 環となり, これは $\mathcal{O}_\Gamma^{\mathbb{T}}$ となります. ここで, Cuntz-Krieger 環のときと同様に $\mathbb{Z}$ との接合積の形に表すことによって, 核型であることが導かれます. この表示を使って, K 群を計算するときも Cuntz-Krieger 環の場合と同様にして計算をします.

Proposition 4.4 $\mathcal{O}_\Gamma$ は核型.

次に単純性ですが, 一般には成立しません. 次の章で K 群を求めるために行列 A_Γ が得られますが, これに対して Cuntz-Krieger 環と同様の議論で ideal の構造定理も得られます （[Cun] を参照）. ここでは与えられた群の情報で具体的に判定可能であろう十分条件を与えます. また純無限性についてはあまり詳しく調べていませんが, $\mathcal{O}_\Gamma$ が単純のときはいつでも純無限になることはわかっているので, 下の十分条件が成立するとき $\mathcal{O}_\Gamma$ は核型, 単純, 純無限であることがわかります.

Proposition 4.5 与えられた融合積 $\Gamma = *_H G_i$ が次の条件を満すとき $\mathcal{O}_\Gamma$ は単純かつ純無限である.

ある $j \in I$ が存在して,

$$\bigcap_{i\neq j} N_i = \{e\},$$

を満たす. 但し, $N_i = \bigcap_{g\in G_i} gHg^{-1}$.

5 $\mathcal{O}_\Gamma$ の K 群

一般に $\mathcal{O}_\Gamma$ の K 群を求める方法として, M. V. Pimsner [Pim1] による, 樹に作用する群による接合積の完全列に適用することができますが, ここではもう少し簡単に求めることができます. 前の章で述べたように $\mathcal{O}_\Gamma$ を $\mathbb{Z}$ の接合積で書き表せるので, Pimsner-Voiculescu exact sequence [PV] を使って $\mathcal{O}_\Gamma$ の K 群を計算するのですが, そのために AF 環 $\mathcal{O}_\Gamma^{\mathbb{T}}$ の K 群を計算する必要があります.

まず, $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ を有限群 H のすべての既約表現の指標として, それらの次元を $n_1, \ldots, n_r$ とすれば, $C^*(H)$ は次のようになります：

$$M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C}).$$

k 番目の行列環 $M_{n_k}(\mathbb{C})$ の単位元 p_k はこのとき次のように表すことができます：

$$p_k = \frac{n_k}{|H|} \sum_{h\in H} \overline{\chi_k(h)} U_h.$$

このとき, 埋め込み $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ が K 群のレベルでどのようになっているかを調べたいのですから, 各 $i \neq j$ に対して,

$$\mathcal{F}_n^i \simeq M_{N(n,i)}(\mathbb{C}) \otimes C^*(H),$$

$$\mathcal{F}_{n+1}^j \simeq M_{N(n+1,j)}(\mathbb{C}) \otimes C^*(H)$$

と表されているので, $\mathcal{F}_n^i \hookrightarrow \mathcal{F}_{n+1}^j$ の各行列環での埋め込み

$$M_{N(n,i)}(\mathbb{C}) \otimes M_{n_k}(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_{N(n+1,j)}(\mathbb{C}) \otimes M_{n_l}(\mathbb{C})$$

がどのくらいの重複度で埋め込まれているかを調べればいいわけです. 但し, 条件 (3) により, $\mathcal{F}_n^i \hookrightarrow \mathcal{F}_{n+1}^i$ の埋め込はないことに注意してください.

そこで, P を $M_{N(n,i)}(\mathbb{C})\otimes M_{n_k}(\mathbb{C})$ での $E\otimes 1$ とします. 但し E は minimal projection です. このとき, $\mathcal{O}_\Gamma$ で表示すれば, ある $\mu\in\Delta_n$ をひとつ固定して,

$$P = S_\mu P_i p_k P_i S_\mu^*$$

と書くことができます. 同様に Q を $M_{N(n+1,j)}(\mathbb{C})\otimes M_{n_l}(\mathbb{C})$ での単位元とすれば,

$$Q = \sum_{\nu\in\Delta_{n+1}} S_\nu P_j p_l P_j S_\nu^*$$

と表されます. したがって条件 (2) と (3) を使って P を次のステップ $\mathcal{F}_{n+1}$ の元として表しておいて, $\mathrm{trace}(PQ)/n_k$ を計算すれば良いわけです. これを計算すると,

$$\mathrm{trace}(PQ)/n_k = \sum_{x\in X_i\setminus\{e\}} \langle \chi_k, \chi_l^x\rangle_{H(x)}$$

となります. ここで, X_i は G_i の H による両側剰余類の代表系で $e\in X_i$ となるようにとっておき, $H(x)$ は xH に H を左から作用させたときの固定化部分群とします. また,

$$\begin{aligned}\chi_l^x(h) &= \chi_l\left(x^{-1}hx\right)\\ \langle \chi_k, \chi_l^x\rangle_{H(x)} &= \frac{1}{|H(x)|}\sum_{h\in H(x)} \overline{\chi_k(h)}\chi_l^x(h).\end{aligned}$$

とします. このとき, $i\neq j$ に対しては $A_\Gamma((j,l),(i,k)) = \sum_{x\in X_i\setminus\{e\}}\langle\chi_k,\chi_l^x\rangle_{H(x)}$ とし, 対角成分は $A_\Gamma((i,k),(i,l)) = 0$ とおきます. $A_\Gamma = [A_\Gamma((i,k),(j,l))]$ と定めれば, $\mathcal{O}_\Gamma$ の K 群は次のように与えられます.

Theorem 5.1

$$\begin{aligned}K_0(\mathcal{O}_\Gamma) &= \mathbb{Z}^N/(1-A_\Gamma)\mathbb{Z}^N.\\ K_1(\mathcal{O}_\Gamma) &= \mathrm{Ker}\left(1-A_\Gamma : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{Z}^N\right).\end{aligned}$$

但し, $N = |I|r$.

最後に簡単な例を紹介します.

Example 1 $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$.

このとき,

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるので, K 群はそれぞれ $K_0(\mathcal{O}_\Gamma) = 0$, $K_1(\mathcal{O}_\Gamma) = 0$ となります. 実際この時は, $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_6} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_3}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_3} \simeq \mathcal{O}_2\oplus\mathcal{O}_2$ となります. この例からわかるように $\mathcal{O}_\Gamma$ はいつも単純になるとは限りません.

Example 2 $\Gamma = \mathfrak{S}_4 *_{\mathfrak{S}_3} \mathfrak{S}_4$.

このとき,

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, K 群はそれぞれ $K_0(\mathcal{O}_\Gamma) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ かつ $K_1(\mathcal{O}_\Gamma) = \mathbb{Z}$ となります. この場合 Γ は前章の単純性の十分条件をみたすことが簡単にチェックできるので, 対応する $\mathcal{O}_\Gamma$ は核型, 単純, 純無限であることがわかります.

References

[Ada] S. Adams: *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups*, Topology. **33** (1994) 765–783.

[Ana] C. Anantharaman-Delaroche: *Systèms dynamiques non commutatifs et moyennabilité*, Math. Ann. **279** (1987) 297–315.

[Cun] J. Cuntz: *A class of C^*-algebras and topological Markov chains II*, Invent. Math. **63** (1981) 25–40.

[CK] J. Cuntz and W. Krieger: *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980) 251–268.

[Fur] H. Furstenberg: *Boundary theory and stochastic processes in homogeneous spaces, Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Williamstown, Mass. 1972/ Proceeding of Symposia in Pure and Applied Mathematics **26** (American Mathematical Society, Providence, R. I. 1973), 193–229.

[GH] E. Ghys and P. de la Harpe: *Sur les groups hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, ed. E. Ghys and P. de la Harpe, Birkhäuser, Boston, (1990).

[Pim1] M.V. Pimsner: *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Invent. Math. **86** (1986) 603–634.

[Pim2] M.V. Pimsner: *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$*, Fields Institute Com. **12** (1997) 189–212.

[PV] M.V. Pimsner and D. Voiculescu: *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain crossed products C^*-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980) 93–118.

[Spi] J. Spielberg: *Free product groups, Cuntz-Krieger algebras, and covariant maps*, Internat. J. Math. **2** (1991) 457–476.